УДК 517.956.25

М. В. Борсук

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С КОНИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ

Получены неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки границы области при минимальных требованиях на гладкость коэффициентов уравнения.

В работе [1] установлены наилучшие показатели Гельдера в окрестности граничной точки для обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка **дивергентного** вида. В данной работе мы получаем аналогичные результаты для **недивергентных** уравнений в области, граница которой содержит коническую точку. Вопросы поведения решений краевых задач для эллиптических уравнений вблизи угловой или конической точки изучали многие математики. Современное состояние этой тематики отражено в обзоре [2]. В работах [3—7] содержатся результаты, близкие к результатам данной работы, но относящиеся к плоским областям с угловой точкой на границе и к уравнениям с более гладкими коэффициентами (наши требования на гладкость коэффициентов — минимально возможные).

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата. В эвклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$ рассматривается ограниченная область G с границей ∂G. Предполагается, что ∂G — гладкая поверхность всюду, кроме начала координат $\mathcal{O}$, а вблизи точки $\mathcal{O}$ она является конической поверхностью с вершиной $\mathcal{O}$:

$$G_0^d = G \cap B_d(0) = \{(r, \omega) \mid 0 < r < d;\ \omega \in \Omega\}.$$

Здесь $B_d(0)$ — шар в R^n радиуса d с центром в $\mathcal{O}$; (r, ω) — сферические координаты точки $x \in R^n$; Ω — область на единичной сфере S^{n-1}, вырезаемая конусом G_0^∞, с бесконечно дифференцируемой границей $\partial\Omega$. Обозначим $\Gamma_0^d = \{(r, \omega) \mid 0 < r < d;\quad \omega \in \partial\Omega\} \subset \partial G$ — боковая поверхность конуса G_0^d; $\Omega_\rho = G_0^d \cap \{|x| = \rho\}$; $0 < \rho < d$.

В области G рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} &a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x), \quad x \in G, \\ &u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial G \end{aligned} \tag{1}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n) при следующих предположениях:

а) условие равномерной эллиптичности $\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \mu\xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}$, $\forall \xi \in R^n$; $\nu, \mu = \mathrm{const} > 0$, $a_{ij}(0) = \delta_i^j$ — символ Кронекера;

б) $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ — функции, измеримые в G и непрерывные в точке $\mathcal{O}$; $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$; $a(x)$ — измеримые в G функции; для них выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)|^2\right)^{1/2} + |x| \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x)\right)^{1/2} + |x|^2 \cdot |a(x)| \leqslant A(|x|),$$

$A(r)$ — положительная монотонно возрастающая функция.

Введем следующие функциональные пространства: $C^l(\overline{G})$ — пространство функций, имеющих непрерывные производные в $\overline{G}$ до порядка $l \geqslant 0$ включительно (если l — целое) и до порядка $[l]$ — целая часть l (если l — нецелое), которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем $l - [l]$; $L_p(G)$ — пространство функций $u(x)$, измеримых на G и суммируемых со степенью $p \geqslant 1$, с конечной нормой $\| u \|_{p,G} = \left(\iint\limits_G | u |^p \, dx \right)^{1/p}$; $V^k_{p,\alpha}(G)$ — пространство функций $u(x)$ с нормой

$$\| u \|_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p\left(\frac{\alpha}{2} - k + |\beta|\right)} | D^\beta u(x) |^p \, dx \right)^{1/p};$$

$V^{k-1/p}_{p,\alpha}(\partial G)$ — пространство граничных значений на ∂G с нормой

$$\| \varphi \|_{V^{k-1/p}_{p,\alpha}(\partial G)} = \inf \| \Phi \|_{V^k_{p,\alpha}(G)},$$

где инфимум берется по всем $\Phi \in V^k_{p,\alpha}(G)$, таким, что $\Phi(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial G$. Определим еще $W^2(G \setminus \mathcal{O})$ как множество функций, для которых конечны интегралы

$$\iint\limits_{G \cap \{r > \varepsilon\}} (u^2_{xx} + | \nabla u |^2 + u^2) \, dx < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$u^2_{xx} = \sum_{i,j=1}^{n} u^2_{x_i x_j}, \quad | \nabla u |^2 = \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i}.$$

Обозначим $\lambda = \lambda(\Omega)$ — наименьшее положительное собственное число задачи

$$\Delta_\omega u + \lambda(\lambda + n - 2) u = 0, \quad \omega \in \Omega,$$
$$u |_{\partial\Omega} = 0,$$

Δ_ω — оператор Лапласа — Бельтрами на единичной сфере.

Под решением задачи (1) будем понимать функцию $u(x) \in C^0(\overline{G}) \cap W^2(G \setminus \mathcal{O})$, удовлетворяющую уравнению для почти всех $x \in G$ и граничному условию для всех $x \in \partial G$.

Основной результат работы — следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $u(x)$ — решение задачи (1) и выполнены предположения а), б), причем $A(r)$ — непрерывная на $[0, d]$ функция, удовлетворяющая в нуле условию Дини. Пусть известна величина $M_0 = \max\limits_{\overline{G}} | u(x) |$. Пусть существуют числа $k_1 > 0$; $k_2 > 0$, $s > \lambda$ и положительная монотонно возрастающая функция $\gamma(r)$, непрерывная на $[0, d]$ и удовлетворяющая в нуле условию Дини, такие, что

$$f(x) \in L_p(G), \quad \gamma^{-1/2}(|x|) f(x) \in V^0_{2,4-n}(G),$$
$$\varphi(x) \in C^\lambda(\partial G) \cap V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G) \cap V^{3/2}_{2,4-n}(\partial G), \quad p > n/2,$$

и выполняются неравенства

$$\Psi(\rho) \equiv \| \gamma^{-1/2} f \|_{V^0_{2,4-n}(G^\rho_0)} + \| \varphi \|_{V^{3/2}_{2,4-n}(\Gamma^\rho_0)} \leqslant k_1 \rho^s,$$
$$\| f \|_{p, G^\rho_0} + \| \varphi \|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\Gamma^\rho_0)} \leqslant k_2 \rho^{\lambda - 2 + n/p}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $u \in V^2_{2,4-n}(G)$ и при этом $\| u \|_{V^2_{2,4-n}(G^\rho_0)} \leqslant c_0 \rho^\lambda$;

2) $| u(x) | \leqslant c_1 | x |^\lambda$, $x \in G^\rho_0$;

3) если $p > n$, $\lambda > 1$, то $| \nabla u(x) | \leqslant c_2 | x |^{\lambda - 1}$, $x \in G^\rho_0$;

4) если $0 < \lambda < 2$, $\frac{n}{2} < p < \frac{n}{2 - \lambda}$, то $u \in V^2_{p,0}(G)$ и при этом $\| u \|_{V^2_{p,0}(G^\rho_0)} \leqslant c_3 \rho^{\lambda - 2 + n/p}$;

5) если $p \geqslant \frac{n}{2 - \lambda}$, то для любых $x, y \in G^\rho_0$

$$| u(x) - u(y) | \leqslant c_1 | x - y |^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$
$$| \nabla u(x) - \nabla u(y) | \leqslant c_2 | x - y |^{\lambda - 1}, \quad 1 < \lambda < 2;$$

6) если $0<\lambda<2$, $\lambda\neq 1$, $p>\frac{n}{2-\lambda}$, то $u\in C^{\lambda}(\bar{G})$; если $\lambda=1$, $p=n$, то $u\in C^{1-\varepsilon}(\bar{G})$ $\forall\varepsilon>0$. (Здесь $0<\rho<d$; c_0, c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, зависящие лишь от величины ν, μ, n, M_0, λ, k_1, k_2, s, d, $A(d)$, $\operatorname{mes} G$, $\int\limits_0^d A(r)\,r^{-1}dr$, $\int\limits_0^d \frac{\gamma(r)}{r}\,dr$).

2. Схема доказательства теоремы 1. Вначале подобно доказательству теоремы 1 в [8] доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $u(x)$ — решение задачи (1) и выполнены предположения а), б), причем $\lim\limits_{r\to+0} A(r)=0$. Пусть

$$f(x)\in V^0_{2,\alpha}(G),\quad \varphi(x)\in C^0(\partial G)\cap V^{3/2}_{2,\alpha}(\partial G),$$

причем $4-n-2\lambda<\alpha\leqslant 2$, и пусть выполнено неравенство

$$\|f\|_{V^0_{2,\alpha}(G^\rho_0)}+\|\varphi\|_{V^{3/2}_{2,\alpha}(\Gamma^\rho_0)}\leqslant k\rho^{(\alpha+n-4)/2}.$$

Тогда $u(x)\in V^2_{2,\alpha}(G)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{V^2_{2,\alpha}(G)}\leqslant c\left(\|u\|_{2,G}+\|f\|_{V^0_{2,\alpha}(G)}+\|\varphi\|_{V^{3/2}_{2,\alpha}(\partial G)}\right),$$

где постоянная $c>0$ зависит лишь от величин ν, μ, α, λ, n $\max\limits_{\bar{G}} A(|x|)$ и от области G.

Замечание. Теорема 2 содержится в [3] при бесконечно дифференцируемых коэффициентах и в [4, теорема 2.2] — при непрерывных коэффициентах для уравнений, близких в определенном смысле к модельному.

Далее методом слоев Кондратьева с использованием L_p-оценок Агмона — Дуглиса — Ниренберга для решений линейных эллиптических уравнений внутри области и вблизи гладкого куска границы доказываем

$$\iint\limits_{G^\rho_0} r^{4-n}u^2_{xx}dx\leqslant c_4\left(\iint\limits_{G^{2\rho}_0} r^{2-n}|\nabla u|^2dx+\Psi^2(2\rho)\right). \tag{2}$$

Обозначим $v(\rho)=\iint\limits_{G^\rho_0} r^{2-n}|\nabla u|^2dx$. Умножим обе части уравнения (1) на $u(x)\,r^{2-n}$ и проинтегрируем по области G^ρ_0. Используя предположения а), б) и оценку (2), аналогично [8] для функции $v(\rho)$ получаем дифференциальное неравенство

$$v(\rho)\leqslant\frac{\rho}{2\lambda}v'(\rho)+\delta(\rho)v(\rho)+c_5\rho^{-\beta}\Psi^2(\rho)+\varepsilon(\rho)\left[v(2\rho)+\Psi^2(2\rho)\right]\ \forall\beta>0, \tag{3}$$

$$0<\rho<d,\quad v(d)=v_0,$$

где $\varepsilon(\rho)$, $\delta(\rho)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Дини в нуле. Доказывается, что для решения дифференциального неравенства (3) справедлива оценка

$$v(\rho)\leqslant c_6v_0\rho^{2\lambda}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) приходим к справедливости утверждения 1 теоремы 1.

В слое $Q'=\left\{x'\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x'|<1\right\}$ рассмотрим функцию $z(x')=\rho^{-\lambda}\times$ $\times\, u(\rho x')$, которая удовлетворяет уравнению

$$a_{ij}(\rho x')\,z_{x'_ix'_j}+\rho a_i(\rho x')\,z_{x'_i}+\rho^2a(\rho x')\,z=\rho^{2-\lambda}f(\rho x'),\quad x'\in Q'. \tag{5}$$

Используя теоремы вложения Соболева — Кондрашова, L_p-оценки Агмона — Дуглиса — Ниренберга и Ладыженской — Уральцевой (теорема 13.3 гл. III [9]) для решений уравнения (5), на основании доказанного выше получаем утверждения 2) — 6) теоремы 1.

3. **Примеры.** Приведем примеры, показывающие, что условие Дини на функцию $A(r)$ предположения б) в точке $\mathcal{O}$ является необходимым для справедливости утверждений теоремы 1.

Пусть $n=2$, область G лежит внутри угла

$$G_0=\{(r,\omega)\,|\,r>0;\ 0<\omega<\omega_0\},\quad 0<\omega_0<\pi,$$

$\mathcal{O}\in\partial G$, и в некоторой окрестности точки $\mathcal{O}$ граница ∂G совпадает со сторонами угла $\omega=0$ и $\omega=\omega_0$. Число λ в нашем случае, очевидно, равно $\pi/\omega_0>1$.

I. Функция $u(r,\omega)=r^\lambda\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\sin\lambda\omega$ в угле G_0 удовлетворяет уравнению $a_{ij}(x)u_{x_ix_j}=0$ с коэффициентами

$$a_{11}=1-\frac{2}{\lambda+1}\frac{x_2^2}{r^2\ln 1/r},\quad r>0,$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{2}{\lambda+1}\frac{x_1x_2}{r^2\ln 1/r},\quad r>0,$$

$$a_{22}=1-\frac{2}{\lambda+1}\frac{x_1^2}{r^2\ln 1/r},\quad r>0,$$

$$a_{ij}(0)=\delta_i^j\quad(i,j=1,2)$$

и граничному условию $u(r,0)=u(r,\omega_0)=0$. В области G_0^d, $d<e^{-2}$, уравнение равномерно эллиптично: $\mu=1$; $\nu=1-2/\ln\frac{1}{d}$. Далее $A(r)=$ $=2/(\lambda+1)\ln\frac{1}{r}$, $\int\limits_0^d\frac{A(r)}{r}dr=+\infty$, т. е. функция $A(r)$ в нуле не удовлетворяет условию Дини. Вместе с тем $a_{ij}(x)$ непрерывны в точке $\mathcal{O}$. Из явного вида $u(x)$ имеем

$$|u(x)|\leqslant c|x|^{\lambda-\varepsilon};\quad \|u\|_{V^2_{2,2}(G_0^\rho)}\leqslant c\rho^{\lambda-\varepsilon}\quad\forall\,\varepsilon>0. \tag{6}$$

Этот пример показывает, что заменить в оценках (6) $\lambda-\varepsilon$ на λ невозможно без дополнительного предположения о модуле непрерывности старших коэффициентов уравнения в точке $\mathcal{O}$: он должен удовлетворять условию Дини. В утверждениях теоремы 1 показатель λ нельзя и увеличить, как показывают частные решения уравнения Лапласа, в области с угловой или конической точкой $\mathcal{O}$. В этом смысле оценки теоремы 1 являются неулучшаемыми.

II. Функция $u(r,\omega)=r^\lambda\ln\frac{1}{r}\sin\lambda\omega$ является решением в угле G_0 задачи

$$\Delta u+\frac{2\lambda}{r^2\ln\frac{1}{r}}u=0,$$

$$u(r,0)=u(r,\omega_0)=0.$$

Условия а), б) выполняются с функцией $A(r)=2\lambda/\ln\frac{1}{r}$, для которой условие $\lim\limits_{r\to+0}A(r)=0$ выполнено, а условие Дини в нуле — нет. Из явного вида $u(x)$ получаем, что выполнены лишь оценки (6). Этот пример показывает, что предположения теоремы 1 о младших коэффициентах уравнения (1) также существенны.

1. *Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А.* О наилучших показателях Гельдера для обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб.— 1986.— 131, № 1.— С. 113—125.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, вып. 2(230).— С. 4—76.
3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО.— 1967.— 16.— С. 209—292.

4. *Мазья В. Г.* Оценки L_p-средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Math. Nachr.— 1988.— **137**.— С. 113—139.
5. *Azzam A.* Behaviour of solution of Dirichlet problem for elliptic equations at a corner // Indian J. Pure Appl. Math.— 1979.— **10**.— P. 1453—1459.
6. *Azzam A.* On the first boundary value problem for elliptic equations in regions with corners // Arabian J. Sci. and Eng.— 1979.— **4**, N 2.— P. 129—135.
7. *Azzam A.* Smoothness properties of bounded solutions of Dirichlet's problem for elliptic equations in regions with corners on the boundary // Can. Math. Bull.— 1980.— **23**, N 2.— P. 213—223.
8. *Борсук М. В.* Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки // Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, № 6.— С. 25—38.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.

Львов. филиал Киев. НИИ
гидроприборов

Получено 20.07.90